Mathematik Cheat Sheet

1. Allgemeines

1.1. Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$
- Z = ganze Zahlen = $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Q = rationale Zahlen, z.B. $\frac{p}{q}$ (p, q ∈ Z)
- R = reelle Zahlen, „alle Zahlen“, z.B. π
- C = komplexe Zahlen = {a + ib | i = $\sqrt{-1}$, a,b ∈ R}

1.2. Binomische Formeln

1. Binomische Formel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Bnomischer Lehrsatz:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem pascalschen Dreieck entnehmen.

1.3. Sinus & Cosinus

Bogenmaß	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0π	$0°$	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$90°$	1	0	$\pm\infty$
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{1}\pi$	$180°$	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$225°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	$240°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{5}{3}\pi$	$300°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	$315°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$

sowie $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0577350269$

1.4. Bruchrechnung

- $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ = Multiplikation mit Kehrwert = $\frac{ab}{bd}$
- Brüche kürzen: nur Faktoren, nicht Summanden!
  $-\ \frac{2}{2*3} = \frac{2}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

1.5. Potenzrechnung

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$-a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1}$
$e^{ln x} = x$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

1.6. Wurzelrechnung

2. Mengenlehre

2.1. Definition

Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch:
A = $\{x|x$ hat Eigenschaft $E\}$

2.2. Teilmengen

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Merke zu Teilmengen

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

2.3. Operationen

$A \subseteq B$		A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	A vereinigt B	$A \cup B = \{x|x \in A$ oder $x \in B\}$
$A \cap B$	A geschnitten B	$A \cap B = \{x|x \in A$ und $x \in B\}$
$A \setminus B$	A ohne B	$A \cup B = \{x|x \in A$ und $x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge A	Potenzmenge der Menge A
$A \in B$	A Element von B	A ist ein Element von B
$A \notin B$	A kein Element von B	A ist nicht in B enthalten

2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

> Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

> Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

Beispiel

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

2.7. Lösungsalgorithmus

Arbeitsablauf

1. $\setminus$ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

2.8. Vereinfachen

$A \cup A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap A = A$	$A \cup \overline{A} = G$	$\overline{\emptyset} = G$
$A \cup G = G$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\overline{G} = \emptyset$
$A \cap G = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!!
$A \cup \emptyset = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

2.9. Regeln

Kommutativ	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativ	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Adjunktiv	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
de Morganschen Regeln	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetz	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. Aussagenlogik

3.1. Operationen

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$A \leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz oder Bijunktion
$A \rightarrow B$	wenn A dann B	Implikation oder Subjunktion

3.2. Regeln

Kommutativ	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$
Assoziativ	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ $(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
Adjunktiv (Absorbtion)	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$
Klammerntausch	$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$
Kontraposition	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
de Morganschen Regeln	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Umwandeln	$A \wedge B = \neg (A \rightarrow \neg B)$ $A \vee B = \neg A \rightarrow B$ $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

3.3. Beispiel

Günter fragt Anna: "Libst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".
Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P ∧ G?". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg (P \vee G) \qquad (1)$$

Da Anna mit "NeinÄntwortet muss der ganze Block negativiert werden.

$$\neg (P \vee \neg (P \vee G)) \qquad (2)$$

3.4. Wahrheitstafeln

Konjunkiton (UND)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion (ODER)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bijunktion (ist richtig wenn beide gleich sind)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

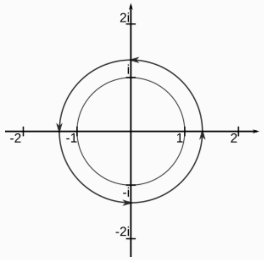
Implikation (aus A folgt B)

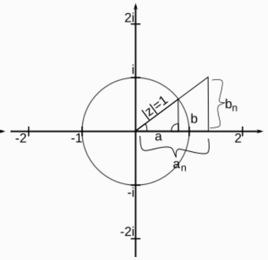
A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \wedge B \rightarrow A \vee B$	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

4. Komplexe Zahlen

4.1. Visualisierung





$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	siehe Tabelle xxx
$\tan(\varphi) = \frac{|b|}{|a|}$	$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$	$\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$a > 0, b \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$	$\varphi = arctan \frac{b}{a}$
$a < 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ$	$\varphi = arctan \frac{b}{a} + \pi$
$a > 0, b \leq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 360^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	$\varphi = 270^\circ$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$a = 0, b = 0$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 0$

4.2. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$	$i^4 = 1$
$i^2 = -1$	$i^5 = i$
$i^3 = -i$	$i^6 = -1 ...$

4.3. Rechenoperationen

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + c + (b + d)i \end{aligned}$$

Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= a - c + (b - d)i \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i\right) \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Potenzierung

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= (|z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi i))^n \\ &= |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) i) \end{aligned}$$

Wurzel $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 bis n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) i\right)$$

Es gibt immer n Ergebnisse die in z_k für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

4.4. Formen

Kartesische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

Trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i\right) \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \end{aligned}$$