Mathematik Cheat Sheet

1. Allgemeines

1.1. Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = {1, 2, 3, ...}
- Z = ganze Zahlen = {..., -1, 0, 1, 2, ...}
- Q = rationale Zahlen, z.b. $\frac{p}{q}$ (p, q ∈ Z)
- R = reelle Zahlen, „alle Zahlen", z.b. π
- C = komplexe Zahlen = {a + ib | i = $\sqrt{-1}$, a,b ∈ R}

1.2. Binomische Formeln

1. Binomische Formel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Bnomischer Lehrsatz:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem pascalschen Dreieck entnehmen.

1.3. Quatratische Gleichung

1.3.1. p-q Formel

Grundlage ist ein Polynom: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.3.2. Mitternachtsformel

Grundlage ist ein Polynom: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4. Potenzrechnung

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (1) \qquad e^{\ln x} = x \quad (5)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (2) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (6)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (3) \qquad -a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1} \quad (7)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (4) \qquad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad (8)$$

1.5. Wurzelrechnung

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad (9)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad (10)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ wenn } b \neq 0 \quad (12)$$

1.6. Bruchrechnung

Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ab}{bd}$	Multiplizieren mit dem Kehrwert
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	
Kürzen	$\frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	Nur Faktoren, keine Summanden!!

Trick 17: $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$

1.7. Sinus & Cosinus

Bogenmaß	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0π	$0°$	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$90°$	1	0	$\pm\infty$
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{1}\pi$	$180°$	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$225°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	$240°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{5}{3}\pi$	$300°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	$315°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$

sowie $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0577350269$

2. Mengenlehre

2.1. Definizion

Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch:

A = $\{x | x$ hat Eigenschaft $E\}$

2.2. Teilmengen

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Merke zu Teilmengen

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

2.3. Operationen

$A \subseteq B$		A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	A vereinigt B	$A \cup B = \{x | x \in A$ oder $x \in B\}$
$A \cap B$	A geschnitten B	$A \cap B = \{x | x \in A$ und $x \in B\}$
$A \setminus B$	A ohne B	$A \setminus B = \{x | x \in A$ und $x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge A	Potenzmenge der Menge A
$A \in B$	A Element von B	A ist ein Element von B
$A \notin B$	A kein Element von B	A ist nicht in B enthalten

2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

> Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

> Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

Beispiel

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

2.7. Lösungsalgorithmus

Arbeitsablauf

1. $\setminus$ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

2.8. Vereinfachen

$A \cup A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap A = A$	$A \cup \overline{A} = G$	$\overline{\emptyset} = G$
$A \cup G = G$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\overline{G} = \emptyset$
$A \cap G = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!!
$A \cup \emptyset = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

2.9. Regeln

Kommutativ	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativ	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Adjunktiv	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
de Morganschen Regeln	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetz	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. Aussagenlogik

3.1. Operationen

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$A \leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz oder Bijunktion
$A \rightarrow B$	wenn A dann B	Implikation oder Subjunktion

3.2. Regeln

Kommutativ	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$
Assoziativ	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ $(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
Adjunktiv (Absorbtion)	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$
Klammerntausch	$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$
Kontraposition	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
de Morganschen Regeln	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Umwandeln	$A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$ $A \vee B = \neg A \rightarrow B$ $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
Vereinfachen	$A \wedge \neg A$ = immer Falsch! $A \vee \neg A$ = immer Richtig! $A \wedge \neg A \vee B \wedge A = B \wedge A$

3.3. Beispiel

Günter fragt Anna: "Libst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".

Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P ∧ G?". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg(P \vee G) \quad (13)$$

Da Anna mit "NeinÄntwortet muss der ganze Block negativiert werden.

$$\neg(P \vee \neg(P \vee G)) \quad (14)$$

3.4. Wahrheitstafeln

Konjunkiton (UND)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion (ODER)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bijunktion (ist richtig wenn beide gleich sind)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

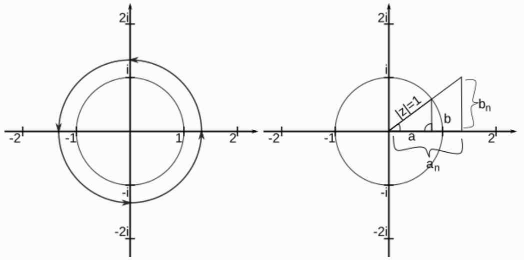
Implikation (aus A folgt B)

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \wedge B \to A \vee B$	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

4. Komplexe Zahlen

4.1. Visualisierung



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ $\quad$ siehe Tabelle xxx

$\tan(\varphi) = \frac{|b|}{|a|}$ $\quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$ $\quad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$a > 0, b \geq 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$	$\varphi = arctan\frac{b}{a}$
$a < 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 180°$	$\varphi = arctan\frac{b}{a} + \pi$
$a > 0, b \leq 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 360°$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	$\varphi = 90°$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	$\varphi = 270°$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$a = 0, b = 0$	$\varphi = 0°$	$\varphi = 0$

4.2. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$ $\quad i^4 = 1$

$i^2 = -1$ $\quad i^5 = i$

$i^3 = -i$ $\quad i^6 = -1 \ldots$

4.3. Rechenoperationen

Addition

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i) \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \cdot i \end{aligned}$$

Potenzierung

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= (|z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi i))^n \\ &= |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) i) \end{aligned}$$

Wurzel $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 bis n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) i\right)$$

Es gibt immer n Ergebnisse die in z_k für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

4.4. Formen

Kartesische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

Trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i) \end{aligned}$$

5. Vektoren und Matritzen

Matritzen vom Typ (m,1) sind Vektoren (1-Spaltig). Die Zeilen eines Vektors sind auch die Dimension des Vektors. Ein Zeilen Vektor ist eine Matritze vom Typ (1, n).

5.1. Rechenoperationen

5.1.1. Skalar

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar (einer Zahl) c.

$$\begin{aligned} -1 \cdot A &= -A \\ c \cdot A &= A \cdot c = Ac = cA \\ c_1 \cdot (c_2 \cdot A) &= (c_1 \cdot c_2) \cdot A \\ (c_1 + c_2) \cdot A &= c_1 \cdot A + c_2 \cdot A \\ c \cdot (A + B) &= cA + cB \end{aligned}$$

5.1.2. Multiplikation

- Zeile von Matrix A mal Spalte von Matrix B
- Matrix A muss so viele Spalten haben wie Matrix B Zeilen hat
- Nicht Kommutativ!! $A \cdot B \neq B \cdot A$

5.1.3. Determinante

- Ist $\det A \neq 0$ dann ist die Matrix invertierbar
- Ist $\det A = 0$ dann ist die Matrix Linear abhängig
- Schachbrettmuster (beginnend oben links mit + - + -..)
- Entwicklung am einfachsten nach der Spalte oder Zeile mit den meisten 0er.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} detA &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (1 * 5 - 1 * 3) = -8 \end{aligned}$$

5.2. Inverse Matrix

Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matritzen. Eine Matrix ist dann Invertierbar wenn die Determinante $\neq 0$ ergibt.

$A^{-1} \cdot A = I$ $\quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$A \cdot A^{-1} = I$ $\quad I \cdot A = A$

$I \cdot A^{-1} = A^{-1}$

6. Vektoren

6.1. Vektor Aufstellen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

6.2. Rechenoperation

Addition	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_1 \\ 2 + b_2 \end{pmatrix}$
Multiplikation	$\vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{pmatrix}$
Betrag	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{{b_1}^2 + {b_1}^2}$
Skalarpordukt	$\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Kreuzprodukt (Abb. ??)	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Ist das Skalarprodukt = 0 dann sind die Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander!

7. Geraden und Ebenen

7.1. Schnittpunkte

Gerade Den Schnittpunkt von zwei geraden erhält man indem man die beiden Geradengleichungen gleich setzt.

Ebene Bei Einer Ebene funktioniert die Berechnung des Schnittpunktes analog zu dem einer Geraden.

7.2. Winkel

Gerade und Gerade

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

Gerade und Ebene

$$\cos\alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

7.3. Formen

7.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$\vec{p}$ = Stützvektor und $\vec{u}$ = Richtungsvektor.

7.3.2. Ebenen

Parameterform	$E : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$
Normalform	$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$

$\vec{p}$ = Stützvektor und $\vec{u}, \vec{v}$ = Spannvektor

Umformen:

1. Parameter $\to$ Normalform
2. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren
3. $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
4. Koordinatenform aufstellen
   $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ (Normalform aus multipliziert)