Mathematik Cheat Sheet

1. Allgemeines

1.1. Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$ = natürliche Zahlen = {1, 2, 3, ...}
- $\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen = {..., -1, 0, 1, 2, ...}
- $\mathbb{Q}$ = rationale Zahlen, z.b. $\frac{p}{q}$ (p, q $\in \mathbb{Z}$, q $\neq$ 0)
- $\mathbb{R}$ = reelle Zahlen, „alle Zahlen", z.b. π
- $\mathbb{C}$ = komplexe Zahlen = {a + ib | i = $\sqrt{-1}$, a,b $\in \mathbb{R}$ }

1.2. Binomische Formeln

1. Binomische Formel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Bnomischer Lehrsatz:	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem pascalschen Dreieck entnehmen.

1.3. Quatratische Gleichung

1.3.1. p-q Formel

Grundlage ist ein Polynom: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.3.2. Mitternachtsformel

Grundlage ist ein Polynom: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4. Potenzrechnung

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad e^{\ln x} = x$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad -a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

1.5. Wurzelrechnung

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ wenn } b \neq 0$$

1.6. Bruchrechnung

Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$	Multiplizieren mit dem Kehrwert
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	
Kürzen	$\frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	Nur Faktoren, keine Summanden!!

Trick 17: $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$

1.7. Sinus & Cosinus

Bogenmaß	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0π	$0°$	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$90°$	1	0	$\pm\infty$
$\frac{2}{3}\pi$	$120°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$135°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$150°$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{1}\pi$	$180°$	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	$210°$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$225°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	$240°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	$270°$	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{5}{3}\pi$	$300°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	$315°$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	$330°$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$ und $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$

sowie $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0577350269$

2. Mengenlehre

2.1. Definition

Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch:

A = $\{x | x$ hat Eigenschaft $E\}$

2.2. Teilmengen

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Merke zu Teilmengen

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

2.3. Operationen

$A \subseteq B$		A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	A vereinigt B	$A \cup B = \{x \vert x \in A$ oder $x \in B\}$
$A \cap B$	A geschnitten B	$A \cap B = \{x \vert x \in A$ und $x \in B\}$
$A \setminus B$	A ohne B	$A \setminus B = \{x \vert x \in A$ und $x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge A	Potenzmenge der Menge A
$A \in B$	A Element von B	A ist ein Element von B
$A \notin B$	A kein Element von B	A ist nicht in B enthalten

2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

Beispiel

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

2.7. Lösungsalgorithmus

Arbeitsablauf

1. $\setminus$ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

2.8. Vereinfachen

$A \cup A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap A = A$	$A \cup \overline{A} = G$	$\overline{\emptyset} = G$
$A \cup G = G$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\overline{G} = \emptyset$
$A \cap G = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!!
$A \cup \emptyset = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

2.9. Regeln

Kommutativ	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativ	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Adjunktiv	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
de Morganschen Regeln	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetz	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

2.10. Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt $A \times B$ (A kreuz B) ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$

3. Relationen

3.1. Definition

Eine (zweistellige) Relation R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen A und B.

$R \subseteq A \times B$

3.2. Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine zweistellige Relation auf einer Ausgangsmenge M mit bestimmten Eigenschaften.

$R \subseteq M \times M$

Eigenschaften

1. **Reflexivität**
   Jedes Element der Ausgangsmenge M steht mit sich selbst in Beziehung.
   Für alle $a \in M$ gilt $(a, a) \in R$
2. **Symmetrie**
   Zu jedem Paar (a, b) ist auch die Umkehrung in R enthalten.
   Wenn $(a, b) \in R$, dann ist auch $(b, a) \in R$
3. **Transitivität**
   Stehen drei Elemente verkettet in Beziehung, dann stehen sie auch direkt in Beziehung.
   Wenn $(a, b), (b, c) \in R$ dann ist auch $(a, c) \in R$

4. Aussagenlogik

4.1. Operationen

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$A \leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz oder Bijunktion
$A \rightarrow B$	wenn A dann B	Implikation oder Subjunktion

4.2. Regeln

Kommutativ	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$
Assoziativ	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ $(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
Adjunktiv (Absorbtion)	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$
Klammerntausch	$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$
Kontraposition	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
de Morganschen Regeln	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

von Sebastian Preisner – Mail: wbh@calyrium.org

Umwandeln	$A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$
	$A \vee B = \neg A \rightarrow B$
	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$
	$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
	$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
Vereinfachen	$A \wedge \neg A =$ immer Falsch!
	$A \vee \neg A =$ immer Richtig!
	$A \wedge \neg A \vee B \wedge A = B \wedge A$

4.3. Beispiel

Günter fragt Anna: "Libst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".
Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P ∧ G?". Formal bedeutet das:

$P \vee \neg(P \vee G)$

Da Anna mit "NeinÄntwortet muss der ganze Block negativiert werden.

$\neg(P \vee \neg(P \vee G))$

4.4. Wahrheitstafeln

Konjunkiton (UND)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion (ODER)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bijunktion (ist richtig wenn beide gleich sind)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Implikation (aus A folgt B)

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \wedge B \rightarrow A \vee B$	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

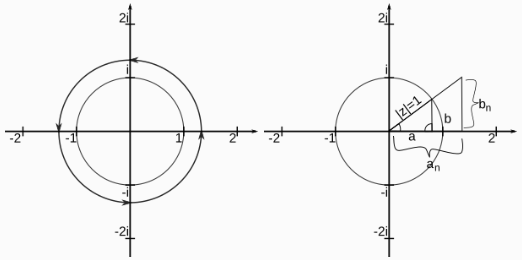
5. Komplexe Zahlen

5.1. Notation

Kartesische Form
$z = a + b \cdot i$

Trigonometrische Form / Polarform
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

5.2. Visualisierung



$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	siehe Tabelle xxx
$\tan(\varphi) = \frac{\|b\|}{\|a\|}$	$\cos(\varphi) = \frac{a}{\|z\|}$	$\sin(\varphi) = \frac{b}{\|z\|}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$a > 0, b \geq 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$	$\varphi = arctan\frac{b}{a}$
$a < 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 180°$	$\varphi = arctan\frac{b}{a} + \pi$
$a > 0, b \leq 0$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 360°$	$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	$\varphi = 90°$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	$\varphi = 270°$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$a = 0, b = 0$	$\varphi = 0°$	$\varphi = 0$

5.3. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$	$i^4 = 1$
$i^2 = -1$	$i^5 = i$
$i^3 = -i$	$i^6 = -1...$

5.4. Rechenoperationen

Addition

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i) = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) i)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i$$

Potenzierung

$$z^n = (a + bi)^n = (|z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi i))^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) i)$$

Wurzel $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 \text{ bis } n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) i\right)$$

Es gibt immer n Ergebnisse die in z_k für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

6. Vektoren und Matrizen

Matrizen vom Typ (m,1) sind Vektoren (1-Spaltig). Die Zeilen eines Vektors sind auch die Dimension des Vektors. Ein Zeilen Vektor ist eine Matritze vom Typ (1, n).

6.1. Rechenoperationen

6.1.1. Skalar

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar (einer Zahl) c.

$$-1 \cdot A = -A$$
$$c \cdot A = A \cdot c = Ac = cA$$
$$c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$$
$$(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A + c_2 \cdot A$$
$$c \cdot (A + B) = cA + cB$$

6.1.2. Multiplikation

- Zeile von Matrix A mal Spalte von Matrix B
- Matrix A muss so viele Spalten haben wie Matrix B Zeilen hat
- Nicht Kommutativ!! $A \cdot B \neq B \cdot A$

6.1.3. Determinante

- Ist $\det A \neq 0$ dann ist die Matrix invertierbar
- Ist $\det A = 0$ dann ist die Matrix Linear abhängig
- Schachbrettmuster (beginnend oben links mit + - + -..)
- Entwicklung am einfachsten nach der Spalte oder Zeile mit den meisten 0er.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$detA = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot (1 * 5 - 1 * 3) = -8$$

6.2. Inverse Matrix

Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matritzen. Eine Matrix ist dann Invertierbar wenn die Determinante $\neq 0$ ergibt.

$A^{-1} \cdot A = I$	$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$A \cdot A^{-1} = I$	$I \cdot A = A$
$I \cdot A^{-1} = A^{-1}$	

7. Vektoren

7.1. Vektor Aufstellen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

7.2. Rechenoperation

Addition	$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$
Multiplikation	$\overrightarrow{a} = c \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{pmatrix}$
Betrag	$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_1{}^2}$
Skalarprodukt	$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Kreuzprodukt (Abb. ??)	$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Ist das Skalarprodukt = 0 dann sind die Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander!

8. Geraden und Ebenen

8.1. Schnittpunkte

Gerade Den Schnittpunkt von zwei geraden erhält man indem man die beiden Geradengleichungen gleich setzt.

Ebene Bei Einer Ebene funktioniert die Berechnung des Schnittpunktes analog zu dem einer Geraden.

8.2. Winkel

Gerade und Gerade

$$\cos\alpha = \left| \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} \right|$$

Gerade und Ebene

$$\cos\alpha = \left| \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} \right|$$

8.3. Formen

8.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{u}$$

$\overrightarrow{p}$ = Stützvektor und $\overrightarrow{u}$ = Richtungsvektor.

8.3.2. Ebenen

Parameterform	$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{u} + s \cdot \overrightarrow{v}$
Normalform	$\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) = 0$

$\overrightarrow{p}$ = Stützvektor und $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ = Spannvektor

Umformen:

1. Parameter → Normalform
2. $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren
3. $\overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p}) = 0$
4. Koordinatenform aufstellen
   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{p}$ (Normalform aus multipliziert)

9. Grenzwerte

Der Grenzwert oder Limes einer Folge ist eine Zahl, der die Folge beliebig nah kommt. Eine Folge ist **konvergent** wenn sie solch einen Wert besitzt, ansonsten **divergent**

9.1. Berechnung

Bei $n \to \infty$ teilt man durch die variable mit der höchsten Potenz, das Ergebnis ist dann der Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2-1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2+1} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Ergebnisse

$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{0}=\infty$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{17}=\frac{1}{17}$

Vorsicht bei $\lim\limits_{n\to a}$, also Limes gegen eine Zahl a. Zunächst setzt man die Zahl a ein und prüft das Ergebnis. Es darf nicht $\frac{0}{0}$ raus kommen. Es wird sich im Zähler und/oder Nenner ein $n-a$ befinden. Die Folge muss dann in Linearfaktoren zerlegt werden und danach die 3 eingesetzt werden.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{2x^2+32x-34} = \lim_{x\to 1} \frac{x\,(x-1)\,(x-5)}{2\,(x-1)\,(x+17)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\,(x-5)}{2\,(x+17)} = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}$$

Ablauf bei $\lim\limits_{n\to a}$

1. Schauen ob man etwas ausklammern kann oder muss
2. Anwendung der p-q Formel um die Nullstellen zu berechnen
3. Sind die Nullstellen $x_1=-4$ und $x_2=5$ dann ist die Auflösung der Binomischen Formel $(x+4)\,(x-5)$
4. Binomische Formel zur Kontrolle ausmultiplizieren
5. Nun im Zähler und Nenner kürzen
6. Danach wird a eingesetzt und das Ergebnis ist der Grenzwert.