Mathematik Cheat Sheet

1. Mengenlehre

1.1. Definizion
Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch:
A $= \{x|x$ hat Eigenschaft $E\}$

1.2. Teilmengen
Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Merke zu Teilmengen

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

1.3. Operationen

$A \subseteq B$		A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	A vereinigt B	$A \cup B = \{x \vert x \in A$ oder $x \in B\}$
$A \cap B$	A geschnitten B	$A \cap B = \{x \vert x \in A$ und $x \in B\}$
$A \setminus B$	A ohne B	$A \cup B = \{x \vert x \in A$ und $x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge A	Potenzmenge der Menge A
$A \in B$	A Element von B	A ist ein Element von B
$A \notin B$	A kein Element von B	A ist nicht in B enthalten

1.4. Potenzmenge
Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

> Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

1.5. Kardinalität
Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

> Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

Beispiel

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

1.6. Komplement
Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

1.7. Lösungsalgorithmus

Arbeitsablauf

1. \ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

Arbeitsablauf

1. \ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

1.8. Regeln

Kommutativ	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativ	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Adjunktiv	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
de Morganschen Regeln	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetz	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

1.9. Vereinfachen

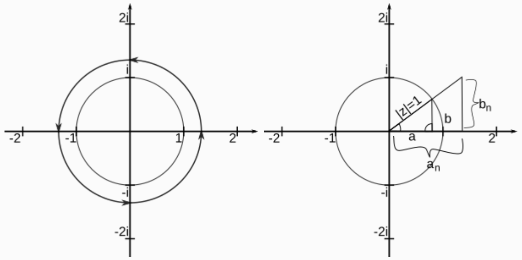
$A \cup A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap A = A$	$A \cup \overline{A} = G$	$\overline{\emptyset} = G$
$A \cup G = G$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\overline{G} = \emptyset$
$A \cap G = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!!
$A \cup \emptyset = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

2. Komplexe Zahlen

2.1. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$	$i^4 = 1$
$i^2 = -1$	$i^5 = i$
$i^3 = -i$	$i^6 = -1$...

2.2. Visualisierung



$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	siehe Tabelle xxx
$\tan(\varphi) = \frac{\lvert b\rvert}{\lvert a\rvert}$	$\cos(\varphi) = \frac{a}{\lvert z\rvert}$	$\sin(\varphi) = \frac{b}{\lvert z\rvert}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$x > 0, y \geq 0$	$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$	$\varphi = arctan\frac{y}{x}$
$x < 0$	$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + 180^\circ$	$\varphi = arctan\frac{y}{x} + \pi$
$x > 0, y \leq 0$	$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + 360^\circ$	$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + 2\pi$
$x = 0, y > 0$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$x = 0, y < 0$	$\varphi = 270^\circ$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$x = 0, y = 0$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 0$

2.3. Formen
Kartesische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

Trigonometrische Form:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i\right) \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \end{aligned}$$

2.4. Rechenoperationen

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + c + (b + d)i \end{aligned}$$

Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= a - c + (b - d)i \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1) i\right) \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) i\right) \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)\, i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Potenzierung

$$\begin{aligned} z^n &= (a + bi)^n \\ &= \left(|z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi i)\right)^n \\ &= |z|^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi) i\right) \end{aligned}$$

Wurzel $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 bis n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) i\right)$$

Es gibt immer n Ergebnisse die in z_k für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

3. Tipps

3.1. Sinus & Cosinus

$\cos 0^\circ = 1$	$\sin 0^\circ = 0$
$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$	$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.70710678$
$\cos 90^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$