



Mathematik Cheat Sheet

1. Allgemeines

1.1. Zahlenmengen

- \mathbb{N} = natürliche Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$
- \mathbb{Z} = ganze Zahlen = $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- \mathbb{Q} = rationale Zahlen, z.B. $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$)
- \mathbb{R} = reelle Zahlen, „alle Zahlen“, z.B. π
- \mathbb{C} = komplexe Zahlen = $\{a + ib \mid i = \sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\}$

1.2. Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 3. Binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Binomischer Lehrsatz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem pascalschen Dreieck entnehmen.

1.3. Quadratische Gleichung

1.3.1. p-q Formel

Grundlage ist ein Polynom: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

1.3.2. Mitternachtsformel

Grundlage ist ein Polynom: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4. Potenzrechnung

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (1) \quad e^{lnx} = x \quad (5)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (2) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (6)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (3) \quad -a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1} \quad (7)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (4) \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad (8)$$

1.5. Wurzelrechnung

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad (9)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot n}} = a^{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n^2]{a} \quad (10)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ wenn } b \neq 0 \quad (12)$$

1.6. Bruchrechnung

Division	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Multiplizieren mit dem Kehrwert
Multiplikation	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	
Kürzen	$\frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$	Nur Faktoren, keine Summanden!!

$$\text{Trick 17: } \frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$$

1.7. Sinus & Cosinus

Bogenmaß	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0π	0°	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	$\pm\infty$
$\frac{2}{3}\pi$	120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	180°	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{5}{3}\pi$	300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678 \text{ und } \frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$$

$$\text{sowie } \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577350269$$

2. Mengenlehre

2.1. Definition

Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch:

$A = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$

2.2. Teilmengen

Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Merke zu Teilmengen

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subseteq A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subseteq A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

2.3. Operationen

$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B
$A \cup B$	A vereinigt B $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \cap B$	A geschnitten B $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \setminus B$	A ohne B $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge A Potenzmenge der Menge A
$A \in B$	A Element von B A ist ein Element von B
$A \notin B$	A kein Element von B A ist nicht in B enthalten

2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge \emptyset hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

Beispiel

$M = \{1, 2\}$
 $\mathcal{P}(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

2.7. Lösungsalgorithmus

Arbeitsablauf

1. \ entfernen
2. De Morgens Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

2.8. Vereinfachen

$A \cup A = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap A = A$	$A \cup \overline{A} = G$	$\overline{\emptyset} = G$
$A \cup G = G$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$\overline{G} = \emptyset$
$A \cap G = A$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\emptyset \neq \{\emptyset\}!!!$
$A \cup \emptyset = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

2.9. Regeln

Kommutativ	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativ	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiv	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Adjunktiv	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
de Morganschen Regeln	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
de Morganschen Gesetz	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. Aussagenlogik

3.1. Operationen

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$A \leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz oder Bijunktion
$A \rightarrow B$	wenn A dann B	Implikation oder Subjunktion

3.2. Regeln

Kommutativ	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$
Assoziativ	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ $(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
Adjunktiv (Absorbtion)	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$
Klammerntausch	$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$
Kontraposition	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
de Morganschen Regeln	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Umwandeln	$A \wedge B = \neg (A \rightarrow \neg B)$ $A \vee B = \neg A \rightarrow B$ $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
Vereinfachen	$A \wedge \neg A = \text{immer Falsch!}$ $A \vee \neg A = \text{immer Richtig!}$ $A \wedge \neg A \vee B \wedge A = B \wedge A$

3.3. Beispiel

Günter fragt Anna: "Liebst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".

Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht $P \wedge G$ ". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg (P \vee G) \quad (13)$$

Da Anna mit "Nein" Antwortet muss der ganze Block negiert werden.

$$\neg (P \vee \neg (P \vee G)) \quad (14)$$

3.4. Wahrheitstabeln
Konjunktio (UND)

Disjunktio (ODER)

A	B	A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bijunktion (ist richtig wenn beide gleich sind)
Implikation (aus A folgt B)

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	A ∧ B	A ∨ B	A ∧ B → A ∨ B	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

4. Komplexe Zahlen

4.1. Visualisierung

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
siehe Tabelle xxx

$\tan(\varphi) = \frac{|b|}{|a|}$
 $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$
 $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$a > 0, b \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$
$a < 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi$
$a > 0, b \leq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 360^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	$\varphi = 270^\circ$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$a = 0, b = 0$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 0$

4.2. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$
 $i^2 = -1$
 $i^3 = -i$
 $i^4 = 1$
 $i^5 = i$
 $i^6 = -1...$

4.3. Rechenoperationen

Addition

Subtraktion

Multiplikation

Division

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i)$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)i)$$

4.4. Formen

Kartesische Form:

Trigonometrische Form:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i)$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)i)$$

5. Vektoren und Matrizen

Matrizen vom Typ (m,1) sind Vektoren (1-Spaltig). Die Zeilen eines Vektors sind auch die Dimension des Vektors. Ein Zeilen Vektor ist eine Matrix vom Typ (1, n).

5.1. Rechenoperationen

5.1.1. Skalar

Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar (einer Zahl) c.

$$-1 \cdot A = -A$$

$$c \cdot A = A \cdot c = Ac = cA$$

$$c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$$

$$(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A + c_2 \cdot A$$

$$c \cdot (A + B) = cA + cB$$

5.1.2. Multiplikation

• Zeile von Matrix A mal Spalte von Matrix B
• Matrix A muss so viele Spalten haben wie Matrix B Zeilen hat
• Nicht Kommutativ! $A \cdot B \neq B \cdot A$

5.1.3. Determinante

• Ist det A \neq 0 dann ist die Matrix invertierbar
• Ist det A = 0 dann ist die Matrix Linear abhängig
• Schachbrettmuster (beginnend oben links mit + - + -..
• Entwicklung am einfachsten nach der Spalte oder Zeile mit den meisten 0er.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \cdot (1 \cdot 5 - 1 \cdot 3) = -8$$

5.2. Inverse Matrix

Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matrizen. Eine Matrix ist dann Invertierbar wenn die Determinante \neq 0 ergibt.

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$I \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$I \cdot A = A$$

5.2. Inverse Matrix

Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matrizen. Eine Matrix ist dann Invertierbar wenn die Determinante \neq 0 ergibt.

$$A^{-1} \cdot A = I$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$I \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$I \cdot A = A$$

6. Vektoren

6.1. Vektor Aufstellen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

6.2. Rechenoperation

Addition

Multiplikation

Betrag

Skalarprodukt

Kreuzprodukt (Abb. ??)

Ist das Skalarprodukt = 0 dann sind die Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander!

7. Geraden und Ebenen

7.1. Schnittpunkte

Gerade

Ebene

7.2. Winkel

Gerade und Gerade

Gerade und Ebene

7.3. Formen

7.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$\vec{p} = \text{Stützvektor und } \vec{u} = \text{Richtungsvektor.}$$

$$\vec{p} = \text{Stützvektor und } \vec{u}, \vec{v} = \text{Spannvektor}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

7.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$\vec{p} = \text{Stützvektor und } \vec{u} = \text{Richtungsvektor.}$$

$$\vec{p} = \text{Stützvektor und } \vec{u}, \vec{v} = \text{Spannvektor}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

8. Grenzwerte

Der Grenzwert oder Limes einer Folge ist eine Zahl, der die Folge beliebig nah kommt. Eine Folge ist **konvergent** wenn sie solch einen Wert besitzt, ansonsten **divergent**

8.1. Berechnung

Bei $n \rightarrow \infty$ teilt man durch die variable mit der höchsten Potenz, das Ergebnis ist dann der Grenzwert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

Ergebnisse

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

$$\frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

Vorsicht bei $\lim_{n \rightarrow a}$, also Limes gegen eine Zahl a. Zunächst setzt man die Zahl a ein und prüft das Ergebnis. Es darf nicht $\frac{0}{0}$ raus kommen. Es wird sich im Zähler und/oder Nenner ein $n - a$ befinden. Die Folge muss dann in Linearfaktoren zerlegt werden und danach die 3 eingesetzt werden.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{2x^2 + 32x - 34} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-5)}{2(x-1)(x+17)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-5)}{2(x+17)} = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}$$

Ablauf bei $\lim_{n \rightarrow a}$

1. Schauen ob man etwas ausklammern kann oder muss
2. Anwendung der p-q Formel um die Nullstellen zu berechnen
3. Sind die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 5$ dann ist die Auflösung der Binomischen Formel $(x + 4)(x - 5)$
4. Binomische Formel zur Kontrolle ausmultiplizieren
5. Nun im Zähler und Nenner kürzen
6. Danach wird a eingesetzt und das Ergebnis ist der Grenzwert.