



# Mathematik Cheat Sheet

## 1. Allgemeines

### 1.1. Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$  = natürliche Zahlen =  $\{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$  = ganze Zahlen =  $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$  = rationale Zahlen, z.B.  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ )
- $\mathbb{R}$  = reelle Zahlen, „alle Zahlen“, z.B.  $\pi$
- $\mathbb{C}$  = komplexe Zahlen =  $\{a + ib \mid i = \sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\}$

### 1.2. Binomische Formeln

- Binomische Formel:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - Binomische Formel:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - Binomische Formel:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Binomischer Lehrsatz:  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Den Binomischen Lehrsatz kannst du auch aus dem Pascalschen Dreieck entnehmen.

### 1.3. Quadratische Gleichung

#### 1.3.1. p-q Formel

Grundlage ist ein Polynom:  $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

#### 1.3.2. Mitternachtsformel

Grundlage ist ein Polynom:  $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### 1.4. Potenzrechnung

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (1) \quad e^{\ln x} = x \quad (5)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (2) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (6)$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (3) \quad -a^{-1} = \frac{-1}{a} = \frac{a^{-1}}{-1} \quad (7)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (4) \quad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad (8)$$

### 1.5. Wurzelrechnung

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad (9)$$

$$m\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = a^{\frac{1}{n}} = m \cdot \sqrt[n]{a} \quad (10)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab} \quad (11)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ wenn } b \neq 0 \quad (12)$$

## 1.6. Bruchrechnung

Division  $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$  Multiplizieren mit dem Kehrwert  
 Multiplikation  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$   
 Kürzen  $\frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$  Nur Faktoren, keine Summanden!

Trick 17:  $\frac{x-1}{x+4} = \frac{x+4-5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{5}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$

## 1.7. Sinus & Cosinus

Bogenmaß	Grad	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0π	0°	0	1	0
$\frac{1}{6}\pi$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{4}\pi$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90°	1	0	$\pm\infty$
$\frac{2}{3}\pi$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	135°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{2}\pi$	180°	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5}{4}\pi$	225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{4}{3}\pi$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{5}{3}\pi$	300°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7}{4}\pi$	315°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$\frac{11}{6}\pi$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$  und  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$   
 sowie  $\frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577350269$

## 2. Mengenlehre

### 2.1. Definition

Ist  $E$  eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der  $E$  erfüllenden Elemente durch:  
 $A = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$

### 2.2. Teilmengen

Sind  $A$  und  $B$  Mengen, so heißt  $A$  Teilmenge oder auch Untermenge von  $B$ , wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist.

#### Merke zu Teilmengen

- Jede Menge  $A$  ist Teilmenge von sich selbst, das heißt  $A \subseteq A$
- Jede Menge  $A$  hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt:  $\emptyset \subseteq A$
- Ist  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq C$ , so folgt  $A \subseteq C$
- Aus  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  folgt  $A = B$

## 2.3. Operationen

$A \subseteq B$   $A$  ist Teilmenge von  $B$   
 $A \cup B$   $A$  vereinigt  $B$   $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$   
 $A \cap B$   $A$  geschnitten  $B$   $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$   
 $A \setminus B$   $A$  ohne  $B$   $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$   
 $\mathcal{P}(A)$  Potenzmenge  $A$   $\mathcal{P}(A)$  Potenzmenge der Menge  $A$   
 $A \in B$   $A$  Element von  $B$   $A$  ist ein Element von  $B$   
 $A \notin B$   $A$  kein Element von  $B$   $A$  ist nicht in  $B$  enthalten

### 2.4. Potenzmenge

Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

Es sei  $A$  eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  der Menge  $A$  die Menge aller Teilmengen von  $A$ . Auch die Menge  $\emptyset$  hat eine Teilmenge es gilt:  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ .

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von  $2^{|A|}$  (Zwei hoch Kardinalität von  $A$ )

### 2.5. Kardinalität

Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

Es sei  $A$  eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von  $A$  die Anzahl der Elemente von  $A$  und schreibt dafür  $|A|$ , manchmal auch  $\#A$ . Hat  $A$  unendlich viele Elemente, so sagt man,  $A$  hat die Kardinalität unendlich, und schreibt  $|A| = \infty$

#### Beispiel

$M = \{1, 2\}$   
 $\mathcal{P}(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$   
 Nicht jedoch  $\{2, 1\}$ ! Es gilt  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ .

### 2.6. Komplement

Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

### 2.7. Lösungsalgorithmus

#### Arbeitsablauf

- $\setminus$  entfernen
- De Morgens Gesetze anwenden
- Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

### 2.8. Vereinfachen

$A \cup A = A$   $A \cap \emptyset = \emptyset$   $\overline{\overline{A}} = A$   
 $A \cap A = A$   $A \cup \overline{A} = G$   $\overline{\emptyset} = G$   
 $A \cup G = G$   $A \cap \overline{A} = \emptyset$   $\overline{G} = \emptyset$   
 $A \cap G = A$   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$   $\emptyset \neq \{\emptyset\}!!!$   
 $A \cup \emptyset = A$   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

### 2.9. Regeln

Kommutativ  $A \cup B = B \cup A$   
 $A \cap B = B \cap A$   
 Assoziativ  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$   
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$   
 Distributiv  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 Adjunktiv  $A \cup (A \cap B) = A$   
 $A \cap (A \cup B) = A$   
 de Morganschen Regeln  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$   
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$   
 de Morganschen Gesetz  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

### 2.10. Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt  $A \times B$  ( $A$  kreuz  $B$ ) ist die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$

## 3. Relationen

### 3.1. Definition

Eine (zweistellige) Relation  $R$  zwischen zwei Mengen  $A \times B$  ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts.

$R \subseteq A \times B$

### 3.2. Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation ist eine zweistellige Relation auf einer Ausgangsmenge  $M$  mit folgenden drei Eigenschaften:

- Reflexivität**  
Jedes Element der Ausgangsmenge  $M$  steht sich selbst in Beziehung.  
Für alle  $a \in M$  gilt  $(a, a) \in R$
- Symmetrie**  
Zu jedem Paar  $(a, b)$  ist auch die Umkehrung in  $R$  enthalten.  
Wenn  $(a, b) \in R$ , dann ist auch  $(b, a) \in R$
- Transitivität**  
Stehen drei Elemente verkettet in Beziehung, dann stehen sie auch direkt in Beziehung.  
Wenn  $(a, b), (b, c) \in R$  dann ist auch  $(a, c) \in R$

## 4. Aussagenlogik

### 4.1. Operationen

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$A \leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz oder Bijunktion
$A \rightarrow B$	wenn A dann B	Implikation oder Subjunktion

### 4.2. Regeln

Kommutativ	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$ $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$
Assoziativ	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ $A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$ $A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$ $(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ $(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$
Adjunktiv (Absorbtion)	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$
Klammerntausch	$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$
Kontraposition	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$
de Morganschen Regeln	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
Umwandeln	$A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$ $A \vee B = \neg A \rightarrow B$ $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
Vereinfachen	$A \wedge \neg A = \text{immer Falsch!}$ $A \vee \neg A = \text{immer Richtig!}$ $A \wedge \neg A \vee B \wedge A = B \wedge A$

**4.3. Beispiel**  
Günter fragt Anna: "Liebst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf antwortet Anna "Nein".  
Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P  $\wedge$  G?". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg(P \vee G) \quad (13)$$

Da Anna mit "Nein" antwortet muss der ganze Block negiert werden.

$$\neg(P \vee \neg(P \vee G)) \quad (14)$$

### 4.4. Wahrheitstabellen

Konjunktion (UND)			Disjunktion (ODER)		
A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

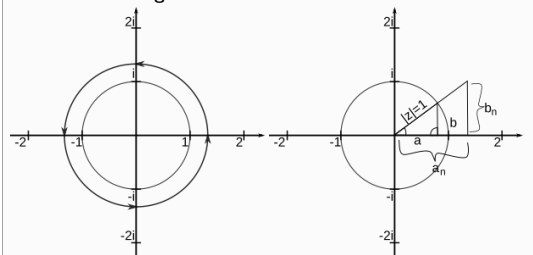
**Bijunktion** (ist richtig wenn beide Implikation (aus A folgt B) gleich sind)

Bijunktion			Implikation		
A	B	$A \leftrightarrow B$	A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	B	C	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \wedge B \rightarrow A \vee B$	G
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

### 5. Komplexe Zahlen

#### 5.1. Visualisierung



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$       $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$      siehe Tabelle xxx

$\tan(\varphi) = \frac{|b|}{|a|}$       $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$       $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

x,y	(in Grad)	(im Bogenmaß)
$a > 0, b \geq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$
$a < 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 180^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + \pi$
$a > 0, b \leq 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 360^\circ$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$
$a = 0, b > 0$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$a = 0, b < 0$	$\varphi = 270^\circ$	$\varphi = \frac{3}{2}\pi$
$a = 0, b = 0$	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 0$

### 5.2. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$       $i^4 = 1$   
 $i^2 = -1$       $i^5 = i$   
 $i^3 = -i$       $i^6 = -1 \dots$

### 5.3. Rechenoperationen

**Addition**     **Subtraktion**

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$       $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$   
 $= a + c + (b + d)i$       $= a - c + (b - d)i$

**Multiplikation**

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$   
 $= ac + adi + bci + bdi^2$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2|(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i)$   
 $= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)i)$

**Division**

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)}$   
 $= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2}$   
 $= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$   
 $= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}i$

**Potenzierung**

$z^n = (a + bi)^n$   
 $= (|z| \cdot (\cos \varphi + \sin \varphi i))^n$   
 $= |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi)i)$

**Wurzel**  $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 \text{ bis } n - 1\}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$   
 $z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right)i \right)$

Es gibt immer n Ergebnisse die in  $z_k$  für  $k = 0$  bis  $k = n - 1$  berechnet werden.

### 5.4. Formen

**Kartesische Form:**

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$   
 $= ac + adi + bci + bdi^2$

### Trigonometrische Form:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2|(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)i)$   
 $= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)i)$

## 6. Vektoren und Matrizen

Matrizen vom Typ (m,1) sind Vektoren (1-Spaltig). Die Zeilen eines Vektors sind auch die Dimension des Vektors. Ein Zeilenvektor ist eine Matrix vom Typ (1, n).

### 6.1. Rechenoperationen

**6.1.1. Skalar**  
Die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen mit einem Skalar (einer Zahl) c.

$-1 \cdot A = -A$   
 $c \cdot A = A \cdot c = Ac = cA$   
 $c_1 \cdot (c_2 \cdot A) = (c_1 \cdot c_2) \cdot A$   
 $(c_1 + c_2) \cdot A = c_1 \cdot A + c_2 \cdot A$   
 $c \cdot (A + B) = cA + cB$

**6.1.2. Multiplikation**

- Zeile von Matrix A mal Spalte von Matrix B
- Matrix A muss so viele Spalten haben wie Matrix B Zeilen hat
- Nicht Kommutativ!  $A \cdot B \neq B \cdot A$

**6.1.3. Determinante**

- Ist det A  $\neq 0$  dann ist die Matrix invertierbar
- Ist det A = 0 dann ist die Matrix Linear abhängig
- Schachbrettmuster (beginnend oben links mit + - + ..)
- Entwicklung am einfachsten nach der Spalte oder Zeile mit den meisten 0er.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$   
 $= -4 \cdot (1 \cdot 5 - 1 \cdot 3) = -8$

**6.2. Inverse Matrix**  
Invertierbar sind nur Matrizen des Typ (n, n) also quadratische Matrizen. Eine Matrix ist dann Invertierbar wenn die Determinante  $\neq 0$  ergibt.

$A^{-1} \cdot A = I$       $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$   
 $A \cdot A^{-1} = I$       $I \cdot A = A$   
 $I \cdot A^{-1} = A^{-1}$

## 7. Vektoren

### 7.1. Vektor Aufstellen

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$       $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$   
 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

### 7.2. Rechenoperation

**Addition**      $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

**Multiplikation**      $\vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb_1 \\ cb_2 \end{pmatrix}$

**Betrag**      $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

**Skalarprodukt**      $\vec{a} * \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

**Kreuzprodukt (Abb. ??)**      $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Ist das Skalarprodukt = 0 dann sind die Vektoren orthogonal (senkrecht) zueinander!

## 8. Geraden und Ebenen

### 8.1. Schnittpunkte

**Gerade** Den Schnittpunkt von zwei Geraden erhält man indem man die beiden Geradengleichungen gleich setzt.  
**Ebene** Bei Einer Ebene funktioniert die Berechnung des Schnittpunktes analog zu dem einer Geraden.

### 8.2. Winkel

Gerade und Gerade

Gerade und Ebene

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right|$$

### 8.3. Formen

#### 8.3.1. Geraden

Allgemeine Form:

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$\vec{p}$  = Stützvektor und  $\vec{u}$  = Richtungsvektor.

#### 8.3.2. Ebenen

Parameterform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Normalform

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$\vec{p}$  = Stützvektor und  $\vec{u}, \vec{v}$  = Spannvektor

**Umformen:**

1. Parameter  $\rightarrow$  Normalform
2.  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$  (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren)
3.  $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
4. Koordinatenform aufstellen  
 $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$  (Normalform aus multipliziert)

## 9. Grenzwerte

Der Grenzwert oder Limes einer Folge ist eine Zahl, der die Folge beliebig nah kommt. Eine Folge ist **konvergent** wenn sie solch einen Wert besitzt, ansonsten **divergent**

### 9.1. Berechnung

Bei  $n \rightarrow \infty$  teilt man durch die variable mit der höchsten Potenz, das Ergebnis ist dann der Grenzwert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

**Ergebnisse**

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{0} = \infty \quad \frac{0}{1} = 0 \quad \frac{1}{17} = \frac{1}{17}$$

**Vorsicht** bei  $\lim_{n \rightarrow a}$ , also Limes gegen eine Zahl a. Zunächst setzt man die Zahl a ein und prüft das Ergebnis. Es darf nicht  $\frac{0}{0}$  raus kommen. Es wird sich im Zähler und/oder Nenner ein  $n - a$  befinden. Die Folge muss dann in Linearfaktoren zerlegt werden und danach die 3 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{2x^2 + 32x - 34} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-5)}{2(x-1)(x+17)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-5)}{2(x+17)} = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

**Ablauf bei  $\lim_{n \rightarrow a}$**

1. Schauen ob man etwas ausklammern kann oder muss
2. Anwendung der p-q Formel um die Nullstellen zu berechnen
3. Sind die Nullstellen  $x_1 = -4$  und  $x_2 = 5$  dann ist die Auflösung der Binomischen Formel  $(x+4)(x-5)$
4. Binomische Formel zur Kontrolle ausmultiplizieren
5. Nun im Zähler und Nenner kürzen
6. Danach wird  $a$  eingesetzt und das Ergebnis ist der Grenzwert.