# Mathematik Cheat Sheet

## 1. Mengenlehre

### 1.1. Definizion
Ist $E$ eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der $E$ erfüllenden Elemente durch:
$A = \{x | x \text{ hat Eigenschaft } E\}$

### 1.2. Teilmengen
Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge oder auch Untermenge von B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

**Merke zu Teilmengen**

1. Jede Menge A ist Teilmenge von sich selbst, das heißt $A \subset A$
2. Jede Menge A hat die leere Menge als Teilmenge, das heißt: $\emptyset \subset A$
3. Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so folgt $A \subseteq C$
4. Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ folgt $A = B$

### 1.3. Operationen

| | | |
|---|---|---|
| $A \subseteq B$ | | A ist Teilmenge von B |
| $A \cup B$ | A vereinigt B | $A \cup B = \{x \| x \in A \text{ oder } x \in B\}$ |
| $A \cap B$ | A geschnitten B | $A \cap B = \{x \| x \in A \text{ und } x \in B\}$ |
| $A \setminus B$ | A ohne B | $A \cup B = \{x \| x \in A \text{ und } x \notin B\}$ |
| $\mathcal{P}(A)$ | Potenzmenge A | Potenzmenge der Menge A |
| $A \in B$ | A Element von B | A ist ein Element von B |
| $A \notin B$ | A kein Element von B | A ist nicht in B enthalten |

### 1.4. Potenzmenge
Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen.

Es sei A eine Menge. Dann versteht man unter der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A die Menge aller Teilmengen von A. Auch die Menge $\emptyset$ hat eine Teilmenge es gilt: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Berechnet wird die Potenzmenge mit Hilfe von $2^{|A|}$ (Zwei hoch Kardinalität von A)

### 1.5. Kardinalität
Beschreibt die Menge aller Elemente einer Menge.

Es sei A eine endliche Menge. Dann versteht man unter der Kardinalität oder auch Mächtigkeit von A die Anzahl der Elemente von A und schreibt dafür $|A|$, manchmal auch $\#A$. Hat A unendlich viele Elemente, so sagt man, A hat die Kardinalität unendlich, und schreibt $|A| = \infty$

**Beispiel**

$M = \{1, 2\}$
$P(M) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
Nicht jedoch $\{2, 1\}$! Es gilt $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

### 1.6. Komplement
Das Komplement ist die Differenz zwischen gegebener Menge und Grundmenge.

### 1.7. Lösungsalgorithmus

**Arbeitsablauf**

1. $\setminus$ entfernen
2. De Morgen Gesetze anwenden
3. Assoziativ- und Distributiv- Gesetze im Wechsel mit dem Vereinfachen

### 1.8. Vereinfachen

| | | |
|---|---|---|
| $A \cup A = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | $\overline{\overline{A}} = A$ |
| $A \cap A = A$ | $A \cup \overline{A} = G$ | $\overline{\emptyset} = G$ |
| $A \cup G = G$ | $A \cap \overline{A} = \emptyset$ | $\overline{G} = \emptyset$ |
| $A \cap G = A$ | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | $\emptyset \neq \{\emptyset\}$!!! |
| $A \cup \emptyset = A$ | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | |

### 1.9. Regeln

| | |
|---|---|
| Kommutativ | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$<br>$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| Distributiv | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| Adjunktiv | $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| de Morganschen Regeln | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$<br>$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ |
| de Morganschen Gesetz | $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ |

## 2. Aussagenlogik

### 2.1. Operationen

| | | |
|---|---|---|
| $A \wedge B$ | A und B | Konjunktion |
| $A \vee B$ | A oder B | Disjunktion |
| $A \leftrightarrow B$ | A genau dann, wenn B | Äquivalenz oder Bijunktion |
| $A \rightarrow B$ | wenn A dann B | Implikation oder Subjunktion |

### 2.2. Regeln

| | |
|---|---|
| Kommutativ | $A \wedge B = B \wedge A$<br>$A \vee B = B \vee A$<br>$A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$ |
| Assoziativ | $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$<br>$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$<br>$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) = (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$ |
| Distributiv | $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$<br>$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$<br>$A \rightarrow (B \vee C) = (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$<br>$A \rightarrow (B \wedge C) = (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$<br>$(A \vee B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$<br>$(A \wedge B) \rightarrow C = (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$ |
| Adjunktiv (Absorbtion) | $A \wedge (A \vee B) = A$<br>$A \vee (A \wedge B) = A$ |
| Klammerntausch | $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$ |
| Kontraposition | $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$ |
| de Morganschen Regeln | $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$<br>$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ |
| Umwandeln | $A \wedge B = \neg (A \rightarrow \neg B)$<br>$A \vee B = \neg A \rightarrow B$<br>$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$<br>$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ |

### 2.3. Beispiel
Günter fragt Anna: "Libst du Peter, oder ist es nicht so, dass du Peter oder mich liebst?", darauf Antwortet Anna "Nein".
Für die Aussage Anna liebt Peter setzen wir P und für Anna liebt Günther G. Die Frage lautet somit "Gilt P, oder gilt nicht P $\wedge$ G?". Formal bedeutet das:

$$P \vee \neg (P \vee G) \quad (1)$$

Da Anna mit "NeinÄntwortet muss der ganze Block negativiert werden.

$$\neg (P \vee \neg (P \vee G)) \quad (2)$$

### 2.4. Wahrheitstafeln

**Konjunkiton** (UND)

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**Disjunktion** (ODER)

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

**Bijunktion** (ist richtig wenn beide gleich sind)

| $A$ | $B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

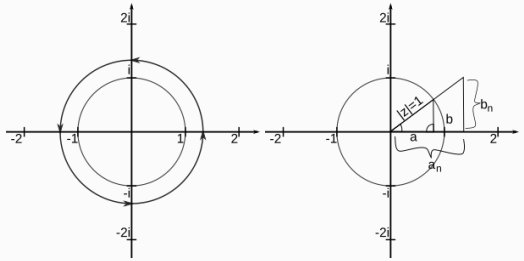
**Implikation** (aus A folgt B)

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B \rightarrow A \vee B$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 3. Komplexe Zahlen

### 3.1. Visualisierung




$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ siehe Tabelle xxx

$\tan(\varphi) = \frac{|b|}{|a|}$ $\quad \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$ $\quad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

| x,y | (in Grad) | (im Bogenmaß) |
|---|---|---|
| $a > 0, b \geq 0$ | $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$ | $\varphi = arctan\frac{b}{a}$ |
| $a < 0$ | $\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 180°$ | $\varphi = arctan\frac{b}{a} + \pi$ |
| $a > 0, b \leq 0$ | $\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 360°$ | $\varphi = \arctan\frac{b}{a} + 2\pi$ |
| $a = 0, b > 0$ | $\varphi = 90°$ | $\varphi = \frac{\pi}{2}$ |
| $a = 0, b < 0$ | $\varphi = 270°$ | $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ |
| $a = 0, b = 0$ | $\varphi = 0°$ | $\varphi = 0$ |

### 3.2. Potenzen von i

$i = \sqrt{-1}$ $\quad i^4 = 1$
$i^2 = -1$ $\quad i^5 = i$
$i^3 = -i$ $\quad i^6 = -1...$

### 3.3. Rechenoperationen

**Addition**

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

**Subtraktion**

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

**Multiplikation**

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2|(\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2)i) = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)i)$$

**Division**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\,i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

**Potenzierung**

$$z^n = (a + bi)^n = (|z| \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi i))^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi)i)$$

**Wurzel** $\{k \in \mathbb{N} | k = 0 bis n - 1\}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi}$$

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 360}{n}\right)i\right)$$

Es gibt immer $n$ Ergebnisse die in $z_k$ für $k = 0$ bis $k = n - 1$ berechnet werden.

### 3.4. Formen

**Kartesische Form:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi) \cdot (c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

**Trigonometrische Form:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| (\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)i) \cdot |z_2| (\cos(\varphi_2) \cdot \sin(\varphi_2)i) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)i) \end{aligned}$$

## 4. Tipps

### 4.1. Sinus & Cosinus

| | |
|---|---|
| $\cos 0^\circ = 1$ | $\sin 0^\circ = 0$ |
| $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cong 0.8660254$ | $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ |
| $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cong 0.70710678$ | $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.70710678$ |
| $\cos 90^\circ = 0$ | $\sin 90^\circ = 1$ |